0.1 Derived category

Derived category については model category での Homotopy category、特に $\mathrm{Ho}(Ch_R)$ の構成がそのまま適用されるし、Derived fanctor は model category における Quillen の意味での定義を見ても同様のことを言っているというのがわかり、具体的にはホモロジー代数で登場する Tor や Ext の一般化であるというのは疑いようも無い。

Definition 0.1.1

$\mathcal{A}$ を abelian category とする。$Ch(\mathcal{A})$ の morphism には、群の時と同様に chain homotopic という同値関係が定義できる。

$Ch(\mathcal{A})$ の object はそのままに、morphism を chain homotopy 類に取り替えることにより、新たな category が得られるので、それを $K(\mathcal{A})$ とおく。さらに $Ch(\mathcal{A})$ の morphism である $f : X^* \longrightarrow Y^*$ を考えたとき、$f^* : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$ が同型の時、f は quasi isomorphism という。$f \sim g$ のとき、$f^* = g^*$ であるので、$[f] \in \mathrm{Mor}(K(\mathcal{A}))$ が quasi isomorphism というものも同様に定義できる。よって、$K(A)$ を quasi isomorphism らで局所化した圏を $\mathcal{D}(A)$ とかき、$\mathcal{A}$ の derived category と呼ぶ。$Co(\mathcal{A})$ からも同じようにして derived category を導けるが、特に記号は区別せずに $K(\mathcal{A}), \mathcal{D}(\mathcal{A})$ で書くことにする。

続いて、Derived fanctor の定義だが、R-module の時と同様に projective や injective object、resolusion を category のレベルで考えなくてはならない。

Definition 0.1.2

C を category とする。$P \in \mathrm{ob}(C)$ が projective object であるとは、任意の epimorphism である $f : A \longrightarrow B$ と morphsim である $g : P \longrightarrow B$ があったとき、$h : P \longrightarrow A$ で $f \circ h = g$ を満たすものが存在することである。

双対的に $I \in \mathrm{ob}(C)$ が injective object であるとは、任意の monomorphism である $f : A \longrightarrow B$ と morphism である $g : A \longrightarrow I$ があったときに、$h : B \longrightarrow I$ で $h \circ f = g$ を満たすものが存在することである。

Definition 0.1.3

$\mathcal{A}$ を abelian category とする。$A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ の projective resolusion とは、

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

を完全にするような chain complex と morphism の組 (P_*, ε) であり、各 P_j が projective であるようなものである。すべての object に対し、projective resolusion が存在すとき、$\mathcal{A}$ は enough projectives を持つという。

双対的に A の injective resolusion とは、

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow \cdots$$

を完全にするような cochain complex と morphism の組 (I^*, δ) であり、各 I^j が injective であるようなものである。すべての object に対し、injective resolusion が存在すとき、$\mathcal{A}$ は enough injectives を持つという。

Definition 0.1.4

$\mathcal{A}$ を enough projective を持つ abelian category とする。$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を右完全な加法的関手とする。$A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ に対し、その projective resolusion は chain homotopy 同値を除いて一意に存在することは、R-module で示したとおりである。よって、そのひとつを (P_*, ε) としたとき、F は chain homotopic を保つので、$F(P_*) \in Ch(\mathcal{B})$ も chain homotopy を除いて一意に決まる。つまり、$H_*(F(P))$ は同型を除いて、A と F にしか依存しない。よってこれを L_*FA とかく。よって、

$$L_jF : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

は covariant fanctor であり、これを F の j 次 left derived fanctor と呼ぶ。F が左完全という仮定は何に使うかというと、

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

が $\mathcal{A}$ における短完全列の時、A, B, C のそれぞれの projective resolusion である P_A, P_B, P_C で、

$$0 \longrightarrow P_A \longrightarrow P_B \longrightarrow P_C \longrightarrow 0$$

が分解する短完全列となるようなものがある。このとき、F の仮定から

$$0 \longrightarrow F(P_A) \longrightarrow F(P_B) \longrightarrow F(P_C) \longrightarrow 0$$

も完全となり、ここから

$$\cdots \longrightarrow L_jFA \longrightarrow L_jFB \longrightarrow L_jFC \xrightarrow{\partial} L_{j-1}FA \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow L_1F(C) \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \longrightarrow 0$$

の完全列が導ける。∂ は singular homology と同じく定義できる。

同様にして、左完全加法的関手 $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ おいて、$\mathcal{A}$ が enough injective なら $R^jF(A) = H^j(F(I))$ が $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ に対し定義する。ただし、I は A の injective resolusion である。よって、contravariant fanctor

$$R^jF : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

が定義され j 次 right derived fanctor と呼ぶ。このとき、

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

の短完全列に対し、

$$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow R^1F(C) \longrightarrow R^1F(B) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow R^jF(C) \longrightarrow R^jF(B) \longrightarrow R^jF(A) \longrightarrow R^{j+1}F(C) \longrightarrow \cdots$$

の長い完全列が存在する。

Example 0.1.5

$\mathcal{A}$ を abelian category とし、$A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ を取ったとき、

$$\mathrm{Hom}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G} \quad , \quad \mathrm{Hom}(-, A) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}$$

はそれぞれ、covariant と contravariant fanctor であるが、これらはそれぞれ右、左完全加法的関手であるので、derived fanctor

$$L_*(\mathrm{Hom}(A, -)) = \mathrm{Ext}_*(A, -) \quad , \quad R^*(\mathrm{Hom}(-, A)) = \mathrm{Ext}^*(-, A)$$

が考えられる。

だが、derived fanctor と呼ばれるならば、$\mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ と derived category を経由するのが名前からしてもしっくり来る。だが、derived category 間の fanctor を考える際、derived category の object は $Ch(\mathcal{A})$ や $Co(\mathcal{A})$ と変わりないので対応は考えやすいが、derived category の morphism というのは局所化した時点でよく分からなくなっている。$K(\mathcal{A})$ までなら chain homotopy 類で考えられるが、$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は $K(\mathcal{A})$ での quasi isomorphism が真に isomorphism となる事ぐらいしか分からない。以下で $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ の morphism について考えるが、次数の関係上 $Co(\mathcal{A})$ の方が都合が良いことが多いのでこちらを採用する。

Definition 0.1.6

$\mathcal{A}$ を abelian category としたとき、$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ において、$\mathrm{Hom}'_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*)$ を次のように定義する。

$$(f^*, s^*)\ ,\ (g^*, t^*) \in \coprod_{C^*} \Big(\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^*, C^*) \times \mathrm{Hom}^{quasi}_{K(\mathcal{A})}(B^*, C^*) \Big)$$

に対し、$(f^*, s^*) \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^*, C^*) \times \mathrm{Hom}^{quasi}_{K(\mathcal{A})}(B^*, C^*)$, $(g^*, t^*) \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^*, D^*) \times \mathrm{Hom}^{quasi}_{K(\mathcal{A})}(B^*, D^*)$ としたとき、$(f^*, s^*) \sim (g^*, t^*)$ を次のように定義する。

$$^{\exists}(\alpha^*, \beta^*) \in \mathrm{Hom}^{quasi}_{K(\mathcal{A})}(C^*, E^*) \times \mathrm{Hom}^{quasi}_{K(\mathcal{A})}(D^*, E^*)$$

$$\text{s.t} \quad \alpha^* \circ f^* = \beta^* \circ g^*\ ,\ \alpha^* \circ s^* = \beta^* \circ t^*$$

次の図式で見ると見やすいかも。

$$\begin{tikzcd}
 & E^* \arrow[r, leftrightarrow, "="] & E^* & \\
C^* \arrow[ur, dotted, "\alpha^*"] & & & D^* \arrow[ul, dotted, "\beta^*"'] \\
 & A^* \arrow[ul, "f^*"] \arrow[urr, "g^*"] & B^* \arrow[ull, "s^*"'] \arrow[ur, "t^*"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき、次で示すように $\sim$ は同値関係となるので、

$$\mathrm{Hom}'_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*) = \coprod_{C^*} \Big(\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^*, C^*) \times \mathrm{Hom}^{quasi}_{K(\mathcal{A})}(B^*, C^*) \Big) / \sim$$

と定義する。また、$[f^*, s^*] = f^*/s^*$ と書くことにする。

$$\gamma : K(A) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

も、$f^* \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^*, B^*)$ に対し、$\gamma(f^*) = f^*/1_{B^*}$ と定義できる。

表記からもわかるように、この定義は整数から有理数を構成する方法を応用している。

Remmark 0.1.7

C を object が 1 つで、$\mathrm{Hom}_C(*, *) = \mathbf{Z}$ となる category とする。このとき、C を $\mathbf{Z} - \{0\}$ で局所化した category である $D = C[\mathbf{Z} - \{0\}]^{-1}$ において、$\mathrm{Hom}_D(*, *) = \mathbf{Q}$ となる。

Lemma 0.1.8

category において push out が取れるとき、isomorphism は cobased cahange で保たれる。

proof) category における図式、$X \xleftarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が push out を持つとする。このとき、$f : Y \longrightarrow X$ が isomorphism とする。このとき push out を考えると、

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "f'"] \\ X \arrow[r, "g'"'] & X \coprod_Y Z \end{tikzcd}$$

であるが、このとき、f' が isomorphism を示す。そのためには、f の inverce を $f^{-1} : X \longrightarrow Y$ とおけば、

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "="] \\ X \arrow[r, "g \circ f^{-1}"'] & Z \end{tikzcd}$$

が可換なので、push out の性質から、f' の inverce である $X \coprod_Y Z \longrightarrow Z$ が取れる。

$\square$

Lemma 0.1.9

$\mathcal{A}$ を abelian category とし、$K(A)$ において quasi isomorphism は cobased change で保たれる。

proof) $A^* \longleftarrow B^* \longrightarrow C^*$ の図式で push out を考えたとき、$B^* \longrightarrow A^*$ を quasi isomorphism とする。

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & C^* \arrow[d] \\ A^* \arrow[r] & A^* \coprod_{B^*} C^* \end{tikzcd}$$

この図式の (co)homology をとると、

$$\begin{tikzcd}
H^*(B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^*(C) \arrow[d] \\
H^*(A) \arrow[r] & H^*\left(A \coprod\limits_{B} C\right)
\end{tikzcd}$$

であるが、push out は colimit で (co)homology は colimit と可換であるから、$H^*\left(A \coprod_B C\right) = H^*(A) \coprod_{H^*(B)} H^*(C)$ と考えられ、上の図式は push out 図式そのままと考えられる。よって、Lemma 0.1.7 により、右縦列は同型となり、$C^* \longrightarrow A^* \coprod_{B^*} C^*$ が quasi isomorphism である。

$\square$

Lemma 0.1.10

$\sim$ は $\coprod_{C^*}\left(\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^*, C^*) \times \mathrm{Hom}^{quasi}_{K(\mathcal{A})}(B^*, C^*)\right)$ における同値関係である。

proof)　反射律は、恒等射はもちろん quasi isomorphism なのでそれを選べばよい。つまり、

$$\begin{tikzcd}
 & C^* \arrow[r, leftrightarrow, "="] & C^* & \\
C^* \arrow[ur, "1"] & & & C^* \arrow[ul, "1"'] \\
 & A^* \arrow[ul, "f^*"] \arrow[urr, "f^*"] & B^* \arrow[ull, "s^*"'] \arrow[ur, "s^*"'] &
\end{tikzcd}$$

対称律は、図式を入れ替えればそれで成り立つことが確認できる。問題は推移律であるが、$(f^*, s^*) \sim (g^*, t^*)$, $(g^*, t^*) \sim (h^*, u^*)$ とする。このとき、図式で書くならば、

$$\begin{tikzcd}
F^* & & G^* \\
C^* \arrow[u, dotted, "\alpha^*"] & D^* \arrow[ul, dotted, "\beta^*"'] \arrow[ur, dotted, "\gamma^*"] & E^* \arrow[u, dotted, "\delta^*"'] \\
A^* \arrow[u, "f^*"] \arrow[ur, "g^*"] \arrow[urr, "h^*"] & & B^* \arrow[ull, "s^*"'] \arrow[ul, "t^*"'] \arrow[u, "u^*"']
\end{tikzcd}$$

とかなり醜くなるのだが、このとき $F^* \xleftarrow{\beta} D^* \xrightarrow{\gamma} G^*$ の push out を取れば、

$$
\begin{tikzcd}
 & F^* \coprod_{D^*} G^* & \\
F^* \arrow[ur, "\varepsilon^*"] & & G^* \arrow[ul, "\zeta^*"'] \\
C^* \arrow[u, "\alpha^*"] & D^* \arrow[ul, "\beta^*"'] \arrow[ur, "\gamma^*"] & E^* \arrow[u, "\delta^*"'] \\
A^* \arrow[u, "f^*"] \arrow[ur, "g^*"] \arrow[urr, "h^*"] & & B^* \arrow[ul, "s^*"'] \arrow[ull, "t^*"] \arrow[u, "u^*"']
\end{tikzcd}
$$

の可換図式が成り立ち、このとき ε^*, ζ^* はそれぞれ、quasi isomorphism である β^*, γ^* の cobased change であるため、Lemma 0.1.8 により、これらも quasi isomorphism となる。よって、$(f^*, s^*) \sim (h^*, u^*)$ である。

□

Definition 0.1.11

$\varphi = f^*/s^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*)$ と $\chi = g^*/t^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(B^*, C^*)$ に対し、その合成、$\chi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(A^*, C^*)$ を次のように定義する。

$$
\begin{tikzcd}
 & D^* & & E^* & \\
A^* \arrow[ur, "f^*"] & & B^* \arrow[ul, "s^*"'] \arrow[ur, "g^*"] & & C^* \arrow[ul, "t^*"']
\end{tikzcd}
$$

の図式の真ん中で push out をとると、

$$
\begin{tikzcd}
 & & D^* \coprod_{B^*} E^* & & \\
 & D^* \arrow[ur, "h^*"] & & E^* \arrow[ul, "u^*"'] & \\
A^* \arrow[ur, "f^*"] & & B^* \arrow[ul, "s^*"'] \arrow[ur, "g^*"] & & C^* \arrow[ul, "t^*"']
\end{tikzcd}
$$

となり、u^* は quasi isomorphism なので、$\chi \circ \varphi = h^* \circ f^*/u^* \circ t^*$ で定義する。これが well defined なのは面倒だが確かめてみればすぐに分かる。

これにより、新たに構成された category である $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は $K(\mathcal{A})$ の localization になっている。実際 localization fanctor

$$\gamma : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

は、morphism 対応を $f^* \mapsto f^*/1$ により定義される。これは f^* が quasi isomorphism なら、$f^*/1$ の inevece として $1/f^*$ が考えられるのできちんと isomorphism に移している。

では $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ の構造もなんとなく分かったところで Drived fanctor を考えよう。